

武汉大学大学生创新创业 训练计划项目科研总结

利用重力频移法测定重力位差

院（系）名 称：测绘学院

专 业 名 称 ： 地球物理学 测绘工程

小 组 成 员 ： 董博琛 张惠凤

朱艺婷 张璘翼

指 导 教 师 ： 申文斌 教授

二〇一七年三月

摘 要

本项目由四名测绘学院 14 级本科生成员组成，专业设计地球物理学、测绘工程类，指导老师为申文斌教授，申文斌系武汉大学教授、博士生导师、珞珈学者特聘教授，主要从事物理大地测量、相对论大地测量及地球物理教学和研究。

传统的重力位测量需要联合水准测量和重力测量，浪费人力物力的同时，耗时周期长，且难以实现全球统一的高程基准。本文基于通讯卫星与地面之间频移信号的传递比对，构建确定重力位的模型，其中包括消除各种误差影响，并实施了相关模拟实验。先通过相对论框架下的重力频移方程给出重力频移量与重力位差之间的关系，并讨论通讯卫星确定地面两点的重力位差的方法，通过模拟计算值，得出由两点重力位确定的重力频移量，最后使用已有模型对一阶多普勒频移量、电离层频移量、对流层频移量、重力频移量、原子钟误差进行改正，最终得到了理论模拟实际观测值的大小。

在科研过程中虽然遇到了很多困难，但在老师和同学的帮助下，我们不断克服了这些困难，完成了模拟实验。同时我们相信，随着时频科学迅速发展，利用星地间信号频移法确定重力位具有很大潜力，有望解决全球高程基准统一问题。

一、研究背景

重力测量的基本任务是确定地球外部重力场以及地球形状,在物理大地测量学中,确定地球形状的传统做法是采用重力测量联合水准测量方法。传统的重力位测量需要联合水准测量和重力测量,不仅浪费人力物力,周期长,难以在山区实施,而且难以实现全球统一的高程基准。为解决该难题,申文斌等提出了利用 GNSS 信号的重力频移确定重力位差 (Shen,2005;Shen and Ning,2011;申文斌等,2008;申文斌、宁津生等,2003;申文斌、晁定波等,1994) 进而确定两地之间海拔高差的方法,其最大的优越性在于可以实现两个大陆之间以及大陆与岛屿之间的跨越海洋的高程传递测量,实现全球高程基准的统一。

我们四位成员具备普通天文学的概念以及天体力学的基础储备,有着良好的实验数据处理习惯,擅长做表绘图,可解决已学过理论逻辑推导问题,利用 Fortran 编程解决该项难题。

二、成员及导师情况

董博琛,系测绘学院本科 14 级地球物理学专业学生。使用 Fortran 语言进行重力位差与频移量的计算,从事文字书写、排版、处理数据方面。

朱艺婷,系测绘学院本科 14 级测绘工程专业学生。收集文献资料,并使用 Fortran 语言构建重力位模型。

张璘翼,系测绘学院本科 14 级地球物理学专业学生。辅助文书排版及计算数据。

张惠凤,系测绘学院本科 14 级地球物理学专业学生。财务管理,梳理知识点并引导交流。

导师申文斌,系武汉大学教授、博士生导师、珞珈学者特聘教授,主要从事物理大地测量、相对论大地测量及地球物理教学和研究。

小组成员定期召开小组会议,讨论最新进展情况以及遇到的难题。积极参与到申老师课题研究团队召开的研讨会中去。从学长学姐交谈中获得课题突破灵感,并且及时请教学长学姐们的科研近况,从交流中碰撞出思想的火花。导师在科研过程前期为我们提供文献并解答相关基础概念问题,经常通过 Email 发布学术会议或小组会议的通知,为我们解决难题提供了新的途径。

三、项目创新点与特色

本次科研将在上述方向中探索，最终通过重力位差的计算，我们可以计算出海拔高，并利用边值问题解决重力位的问题。其创新点如下：

1.克服传统水准测量中地理条件与环境的影响，提供测定重力位和海拔高新途径，实现全球高程基准统一。

2.采用时钟精度达到 10-18 量级，测定重力位（海拔高）的精度可达厘米级，有广阔应用前景。

3.相比于之前的理论，现并没有精华模型可供使用，其中主要因素除了数据精度不够、数据无法使用，更是因为多种误差源影响，该科研将改正各种误差源，利用光原子钟提高精度，完善模型，使该体系能够投入使用。

该项目在构建重力场中发挥重要作用，而重力场的构建，则可确定地球的总质量和地球的平均密度，配合天文测量结果，可以求出地球围绕自转轴的岁差和极移，对地球自转及自由振荡等科研领域有着重要作用，也可以根据地面上大范围甚至全球范围的重力测量结果，可以研究地核-地幔边界的起伏、地幔中的热对流、地壳均衡的状态等等，甚至可以预测自然灾害的发生，综上所述，一个精密模型的建立对于重力场的构建有着不可或缺的作用，而重力场的构建则可以投入到社会中使用，推动科学的进一步发展。

四、项目实施进展情况

首先我们将利用 EGM2008 模型的 2190 阶球谐系数进行重力位的求解，讨论在仅考虑由横向多普勒效应和引力效应引起的重力频移，忽略其余误差影响，求得理论频移量，最终再使用误差模型，将误差放入模拟值中，最终确定实际观测的模拟频率值，比对无误差影响下与有误差影响下的重力位值大小。

4.1 获取重力位

利用编程好的程序可以求得任意一点上的重力位，在此我们选择青岛的原点 O 以及任一点 A（Lon : 100 °; Lat : 30 °），可得两者重力位分别为：

$$W_A = 6.26365100464822 \times 10^7 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$W_O = 6.26369095417119 \times 10^7 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

已知通讯卫星的参数：

$$\begin{aligned} r_s &= 4216700.00 \text{ m} \\ v_s &= 3074.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

利用地球引力位模型低阶进行计算卫星重力位值，采用 40 阶的球谐系数进行处理，最终得到通讯卫星轨道处的重力位值为：

$$W_s = 9.45287973095261 \times 10^6 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

4.2 通过重力位差求解频移量

一般形式下的由重力位求得重力频移 f_{PQ} 的方程

$$\begin{aligned} \Delta W_{PQ} &= W_Q - W_P = -c^2 (f_Q - f_P) / f_s = -c^2 f_{PQ} / f_s \\ f_{PQ} &= f_Q - f_P = -f_s \Delta W_{PQ} / c^2 = -f_s (W_Q - W_P) / c^2 \end{aligned}$$

其中 c 为光在真空中的传播速度：

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

使用同步卫星载波频率作为模拟信号：

$$f_s = 1.57542 \times 10^9 \text{ Hz}$$

4.3 利用重力位值反算各点接收到的时频信号频率

假设在信号传播过程中，只有重力频移存在且影响频率改变，无其他因素对频率造成干扰

$$\text{根据上述公式 } f_{PQ} = f_Q - f_P = -f_s \Delta W_{PQ} / c^2 = -f_s (W_Q - W_P) / c^2$$

我们可以得到理论各点接收到的信号频率：

从地面原点到卫星，卫星所接收到的频率：

$$f_0 = 1.57542003293226 \times 10^9 \text{ Hz}$$

从卫星到地面，卫星发射两种不同信号得到的频率，一种是转播上述所接收到的频率值，另一种是发射与地面相同频率的信号频率，两种频率地面接收到的信号分别为：

$$\begin{aligned} f_{A1} &= 1.57542003200001 \times 10^9 \text{ Hz} \\ f_{A2} &= 1.57542003106775 \times 10^9 \text{ Hz} \end{aligned}$$

可以得到 O、A 两点相对于卫星的重力频移量：

$$\begin{aligned} \Delta f_G^A &= 0.932258201850804 \text{ Hz} \\ \Delta f_G^O &= 0.932251226158197 \text{ Hz} \end{aligned}$$

所以可以得到两点之间的重力频移量：

$$\Delta f_O^A = 0.000006975692607 \text{ Hz}$$

4.4 一阶多普勒频移所造成的误差

由于我们进行的是数值模拟计算，因此将实际的情况进一步的简化，得到一阶多普勒频移量。由方程可以近似的得到一阶多普勒频移的公式：

$$\Delta f_d = \frac{(\vec{v}_r - \vec{v}_s) \cdot \vec{r}}{c} f_s \approx \frac{|\vec{v}_s| \cos E}{10c} f_s$$

其中 $|\vec{v}_s|$ 为卫星的运行速度，当 $E=60^\circ$ 时，计算得出一阶多普勒频移的近似值为：

$$\Delta f_d = 807.698930718890 \text{ Hz}$$

在这里我们近似认为 O、A 两点都可以同时观测到运行速度 $|\vec{v}_s|$ 并且高度角为 60° 的卫星，因此可以认为两点处接受到的卫星信号中一阶多普勒频移相同。

4.5 对流层频移所造成的的误差

本次项目采用的是 Niell 投影函数。

以 Hopfield 模型得到对流层频移的改正模型：

$$\Delta f_{trop} = -\frac{f}{c} \frac{\partial \Delta \rho_{trop}}{\partial t} \approx -\frac{f}{c} \frac{\Delta \rho_{trop2} - \Delta \rho_{trop1}}{t_2 - t_1} = -\frac{\Delta \rho_{trop2} - \Delta \rho_{trop1}}{(t_2 - t_1)c} f$$

所以对流层的频移系数为

$$\alpha_{trop} = -\frac{\Delta \rho_{trop2} - \Delta \rho_{trop1}}{(t_2 - t_1)c}$$

在这里，卫星高度角取 60° ，温度为 25°C ，气压为一个标准大气压，因此可以近似得到：

$$\Delta f_{trop} = 0.00114687635 \text{ Hz}$$

4.6 电离层频移所造成的误差

当 $\text{TEC}=5 \times 10^{17}/\text{m}^2$ 时的电离层延迟值，可以近似的到：

$$\Delta f_{ion} \approx \frac{1.34 \times 10^{-7}}{f} \frac{\text{TEC}_1 - \text{TEC}_2}{t_1 - t_2} = 0.029533570589289 \text{ Hz}$$

4.7 原子钟所造成的频移误差

由原子钟频移的公式（刘利，2006）：

$$\Delta f_{clock} = -4.4647 \times 10^{-10} \times f$$
$$\Delta f_{clock} = -0.703377781465921 \text{ Hz}$$

4.8 估算实际观测信号频率

综合上述，求出的一阶多普勒频移量、重力频移量、对流层频移量、电离层频移量和原子钟频移，可以得到 A、O 点的总频移量：

$$\Delta f_A = 808.632318639313 \text{ Hz}$$

$$\Delta f_O = 808.632311665569 \text{ Hz}$$

因此由模型进行数值模拟计算得到 A、O 点的观测值为：

$$f_A = 1.57541919136768136069 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$f_O = 1.57541919136768833443 \times 10^9 \text{ Hz}$$

可以看到其差值体现在小数点后面，故我们需要更精确的原子钟处理数据。

自此，我们通过相对论框架下的重力频移方程给出重力频移量与重力位差之间的关系，并讨论通讯卫星确定地面两点的重力位差的方法，通过模拟计算值，得出由两点重力位确定的重力频移量，最后使用已有模型对一阶多普勒频移量、电离层频移量、对流层频移量、重力频移量、原子钟误差进行改正，最终得到了理论模拟实际观测值的大小。

五、科研收获

去年三月份，我们报名了针对大学生的科研创新训练。选择了申老师的相对论与其对应重力测量这一相关课题。从申老师那里获取了众多书籍和论文，同时在外文数据库中进行了大量搜索，利用暑假时间补充基础知识，弥补了我们初期知识匮乏的空洞。

在课题进行期间，我们小组多次参加由申老师主持的小组讨论，在讨论会上汇报阶段性的进展和遇到的问题，同时还能听到申老师带领其他小组的课题汇报。申老师不仅会根据每个小组的进展提出意见，而且会让小组之间进行互动讨论。如果有一个小组遇到问题，其他的小组也会从自己的研究角度提出看法，一些比较有研究经验的学长们也会给出适当的建议，因此每次的研究讨论都让人觉得受益良多。在交流中，我们明确了课题的前进方向，并且将之前书本上的知识与现实可利用的技术数据联系在了一起，更加深入地了解到了课题的可行性。总的来说，这些小组研究讨论给我们的课题研究带来了很大的帮助，每一次的讨论相当于一次阶段性的小结，讨论中获得的意见帮助我们做出了很多改进，也便捷的获取了很多实用的信息，比如一些好用的开源软件、一些下载常用数据的网站等等，这使我们避免了很多弯路。

在讨论会之外，如果遇到一些难以想明白的问题，其中比较困难的一步其实就是从理论推导到实际应用的过程，也就是模型的建立，我们小组会单独和申老师约时间讨论，申老师会帮我们一起分析问题并推荐一些参考文献和模型，但当真正去了解这些模型的基本情况，反而为我们所用，极大程度上鼓舞了我们在科研的路上继续前进，最终解决了理论到实际从量变到质变的飞跃。但在应用的过程中我们发现很多的值与现实值并不相符，于是我们从头重新进行查阅，不放过每一个标定的细节，在编程过程中一个小小的符号都可以让整个程序出现 **BUG**，所以极大程度地锻炼了我们的细心程度和准确度。

这次科研可以说是根据相关理论基础，利用该系统将根据同步卫星轨道根数计算卫星实时重力位，用实地测得的地面台站的重力位比较，求得两者之间的重力位差，进而根据广义相对论的相关公式求得两者之间的理论频率差的计算值。而将通过精密时钟控制下的时间频率比对得到的频率差作为观测值（考虑到是同步卫星，可消除大部分的多普勒效应，由于电离层、对流层等带来的误差也可通

过模型进行改正), 与计算值进行比较, 用最小二乘的方法, 对卫星重力位进行改正, 得到精确的卫星重力位, 并将其广播给全球用户, 用户可根据其接收到的频率差与精确的卫星重力位, 利用广义相对论的相关公式求得当地的重力位。

但鉴于目前缺乏相关的测量数据, 我们的框架就使用 EGM2008 地球重力场模型计算所得的重力位数据代替实地测量的重力位数据, 进而计算得到理论频率差, 再根据电离层、对流层模型计算相关误差, 加入计算所得的理论频率差中, 并加入随机误差, 模拟得到一系列的模拟观测数据, 待条件成熟, 即可根据该模拟数据与真实观测数据进行比对, 以期验证该方法的可行性。

最终, 我们利用自行编写的利用频移数据计算重力位的软件, 对模拟数据进行处理, 将所得结果与 EGM2008 地球重力场模型计算所得的重力位数据进行比较, 进而验证该软件的可行性。另外, 期望将来可以用频移数据根据广义相对论计算所得的重力位数据对 EGM2008 地球重力场模型进行改正和精化。

在科研过程中, 我们非常感谢申老师对我们的指导, 以及给予我们的鼓励, 在极大程度上用老师提供的信息节省了我们很多时间探索。我们也十分欣慰自己能够参加一些相关方面的讲座, 比如学院邀请华科的教授来学院做关于高精度原子钟研究的报告, 从专家们的座谈会中, 肯定方案的前景, 获取可靠的理论现实依据。譬如针对课题中出现的时钟精度误差问题, 特地聆听了上海天文台时频研究人员的意见, 对数据演算过程如何降低误差影响等问题有了更清晰的认识, 极大地减小了我们课题开展的难度。可以说一项科研任务的完成, 是汇集大家心血而成的, 所以再次感谢曾帮助我们的各位老师、同学!